12. Теория систем массового обслуживания. Многоканальная СМО с ограниченной очередью. Схема марковского процесса. Уравнения Колмогорова. Установившийся режим. Вероятность отказа. Относительная и абсолютная пропускная способность. Средняя длина очереди.

**СМО**

* Системы, предназначенные для обслуживания большого числа заявок, поступающих на каналы обслуживания.
* Пример: магазин, телефонная станция, мастерская, парикмахерская.
* Заявки (требования) – клиенты, звонки, поломки, посетители.
* Каналы обслуживания (устройства) – продавцы, операторы, мастера, парикмахеры.

**Моделирование СМО**

* Системы массового обслуживания (СМО) моделируются с помощью марковских процессов с непрерывным временем.
* Для этого надо задать:

что является состояниями системы;

что обозначают переходы между состояниями;

составить граф состояний марковского процесса;

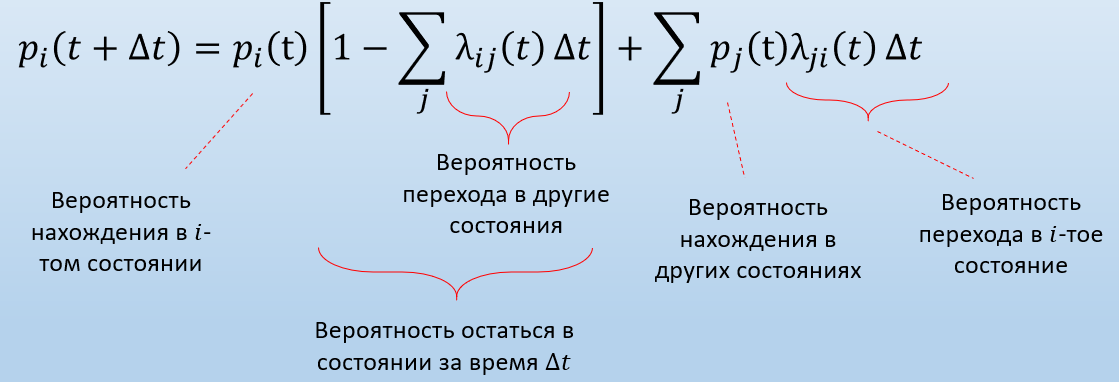
правильно расставить интенсивности переходов между состояниями;

найти установившиеся вероятности;

рассчитать необходимые характеристики.

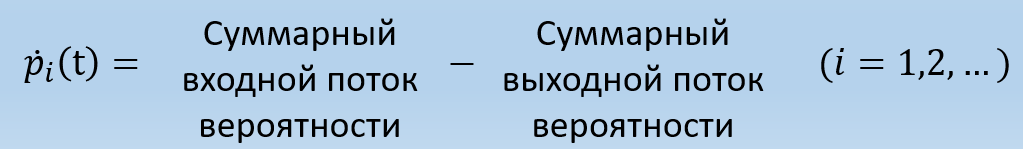
**Уравнения Колмогорова**

Найдем - вероятность того, что в момент система окажется в состоянии .



Разделим все на

Устремим



где - поток вероятности из в

Система дифференциальных линейных уравнений первого порядка

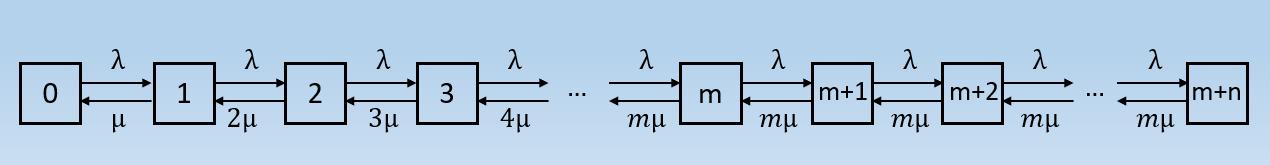
Решение при начальных условиях , ,… (таких, что сумма равна единице) дает - зависимость вероятности состояний от времени для всех состояний

Решение можно получить аналитически либо используя численные методы интегрирования, например, метод Рунге-Кутта четвертого порядка.

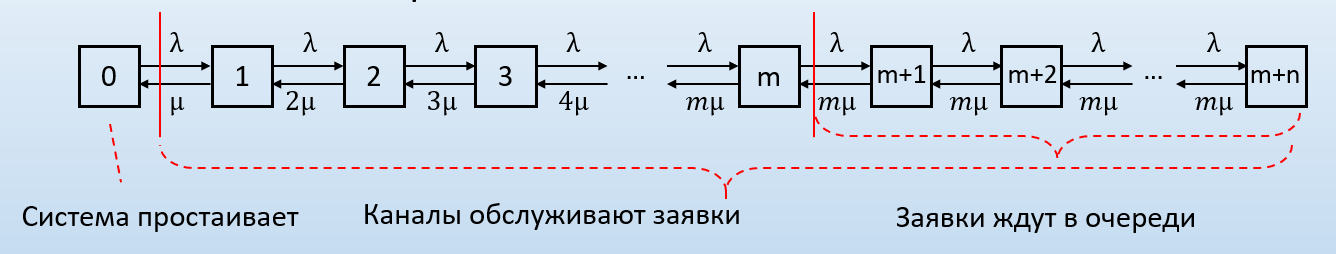
**Многоканальная СМО с ограниченной очередью**

* Состояние системы – количество требований в системе.
* Изменение состояния – поступление или обслуживание требования.
* Все потоки пуассоновские.
* Интенсивность поступления требований -
* Интенсивность обслуживания требований одним каналом -
* Количество каналов - m
* Количество мест в очереди - n

Схема марковского процесса:



* Схема гибели и размножения.



* Состояние 0 – нет требований, система свободна (простаивает).
* До состояния m увеличивается суммарная интенсивность обслуживания.
* С состояния m+1 начинается очередь.
* Находятся все **установившиеся вероятности** :

\*Решим систему линейных уравнений для случая состояний.

\*

\*, где – диагональная матрица из сумм строк матрицы интенсивностей переходов

\*Решение даст только пропорции между , надо заменить любую строку на строку из единиц.

Откуда, умножая обе части слева на обратную матрицу к *,* получаем

что и является установившимися вероятностями.

* - вероятность простоя системы
* - вероятность отказа в обслуживании (новая заявка вынуждена будет покинуть систему необслуженной)
* *-* относительная пропускная способность (доля от всех поступающих заявок)
* – абсолютная пропускная способность
* - средняя длина очереди
* - среднее время в очереди (застигнув систему в состоянии m, мы вынуждены встать в очередь, в которой ждем в среднем 1/интенсивность)
* - среднее количество занятых каналов.